

## II. De Mensura & Motu Aquarum fluentium.

### TENTAMEN PRIMUM.

*Quo agitur de aqua effluente ex vase semper pleno per foramen rotundum, & de resistantia ejusdem ex defectu lubricitatis oriunda. Auctore Jacobo Jurin, Soc. Reg. & Colleg. Medic. Londinenf. Sodale.*

**A**Quarum fluentium *Mensuram* veteres nullam habuerunt, nisi incertam illam & fallacem, quæ, nulla velocitatis habita ratione, sola rivi sectione perpendiculari nitebatur. Ad veram aditum primus aperuit, centum circiter abhinc annis, *Benedictus Castellus, Italus, Galileo* familiaris. Is quum comperisset copiam aquæ per datam rivi sectionem transfluentis, datam non esse, quod veteres crediderant, sed proportionalem celeritati qua fertur aqua per datam sectionem, nobili hoc invento novæ & utilissimæ fundamenta scientiæ jecit, *Hydraulicæ*. Hoc itaque auctore philosophi certatim in eam disciplinam excolendam incubuerunt, ut nemo pene fuerit a *Castelli* temporibus mathematicus paulo insignior; quin aliquid operæ ad ejus incrementum contulerit, sive experimentis instituendis, sive rationibus & argumentis a priori excogitandis.

At plerisque, utut magnis viris, propter summam operis difficultatem, parum feliciter res processit. Nam & theoriam excolentes ea tradiderunt theoremata, quibus factò periculo refragareprehenditur experientia; & qui experimentis capiendis operam dede-

dederunt, cum animum non adverterent ad circumstantias quasdam minutiores, quod iis quid momenti inesset nondum erat compertum, inde factum est, ut tum singuli magnopere inter se dissideant, tum ab illa *Mensura*, quæ reperiri debuerat, pene omnes insigniter aberrârint.

Cujus rei non aliud luculentius dari potest exemplum, quam simplex illud omniumque facillimum, quod reliquis fere universis pro fundamento esse consuevit, quodque nos idcirco diligentius pertractandum suscepimus, ubi aqua ex vase constanter pleno, constanti velocitate, per foramen circulare in fundo factum decurrit. Hic enim ex omnibus unus *Polenus* veram tradidit aquæ effluentis *Mensuram*, aut eam saltem, quæ ad veram proxime accedit: unus *Newtonus* verum posuit ejus *Mensuræ* indagandæ fundamentum; verum, at a plerisque repudiatum; a quibusdam, dissimulato auctoris nomine, pro suo venditatum.

His itaque duobus ducibus rem aggredimur, & primo quidem loco, phænomenon nomine proponemus ea, quæ aut ipsis experimentis comparent, aut ex iisdem, certissimis argumentis confirmantur: deinde ad eorum phænomenon solutionem accedemus.

*Phænomena effluxus aquæ ex foramine in fundo vasis constanter pleni.*

1. Data altitudine aquæ & tempore effluendi, *Mensura* aquæ effluentis est fere in ratione foraminis.

2. Data altitudine aquæ & foramine, *Mensura* aquæ effluentis est in ratione temporis effluendi.

3. Dato

3. Dato tempore effluendi & foramine, *Mensura* aquæ effluentis est fere in ratione subduplicata altitudinis aquæ.

4. *Mensura* aquæ effluentis est fere in ratione composita ex ratione foraminis, ratione temporis, & ratione subduplicata altitudinis aquæ.

5. *Mensura* aquæ dato tempore effluentis longe minor est ea, quæ ex Mathematicorum theorematis vulgo elicitur. Ea nempe vulgo habetur aquæ effluentis velocitas, quam acquirat in vacuo corpus grave cadendo ex integra altitudine aquæ supra foramen; & hoc posito, si area foraminis vocetur  $F$ ,  $A$  altitudo aquæ supra foramen,  $V$  velocitas quam comparat corpus grave cadendo in vacuo ex ista altitudine,  $T$  tempus cadendi, & effluat aqua constanti hac velocitate  $V$ , per tempus  $T$ , erit  $2 A$  longitudo columnæ aqueæ, quæ eo tempore effluit; eritque ejus *Mensura*  $2 AF$ . At si accuratissima \* *Poleni* experimenta ad calculum revoces, copiam aquæ, quæ eo tempore effluit, non nisi  $\frac{571}{1000}$  circiter hujus *Mensuræ*  $2 AF$  conficere perspicias.

Hujus autem viri illustrissimi experimenta, cum propter summam ejus diligentiam, & accurationis studium, tum alio etiam nomine, reliquorum omnibus omnium præferenda censeo. Is siquidem deprehendit copiam aquæ effluentis ex vase per tubum cylindricum, eam quæ exiret per foramen circulare in tenui lamina factum, pari existente diametro tubi & foraminis, & pari altitudine aquæ amboꝝ incum-

---

\* Polenus de Castellis, *Art.* 35, 38, 39, 42, 43.

bentis, longe superare. Idque ita se habere cognovit, cum tubus non fundo quidem, quod alii prius animadverterant, sed lateri vasis infereretur.

Est autem foramen vel in tenui lamina factum, pro brevi tubo cylindrico habendum. Unde patet majorem aquæ copiam ex foramine in lamina tenui facto profluere, quam quæ effluxura fuisset, si, quod aiunt, infinite parva fuisset laminæ crassities. Cujusmodi lamina cum neque haberi, nec etiam cogitatione concipi queat, relinquitur ut augeamus diametrum foraminis, quo laminæ crassities, quam fieri commode potest, minimam rationem obtineat ad foraminis diametrum.

Id vero magno cum judicio præstitit *Polenus*, cum uteretur diametro linearum 26, lamina autem non integram lineam crassa; cum ante cum vix quisquam adhibuerit diametrum 6 aut 7 lineas superantem; aut omnino animum adverterit ad laminæ vel fundi vasis crassitiem, nisi quod unus *Newtonus*, pro summa sua providentia, sese lamina pertenui usum fuisse scribat.

Nec foraminum solum, sed vasorum etiam amplitudini *Polenus* supra omnes prospexit, quo aqua liberrime & quam minimo cum impedimento versus foramen descenderet; ut nullus dubitandi locus sit, quin *Mensuræ* ab eo captæ propius longe quam ullæ a reliquis traditæ ad verum accedant.

6. Cum, ut modo vidimus, *Mensura* aquæ effluentis prædicto tempore  $T$ , sit  $2 AF \times \frac{571}{1000}$ , est longitudo columnæ aquæ, quæ eo tempore effluit,  $2 A \times \frac{571}{1000}$ . Itaque, si particulæ aquæ, quæ eodem temporis

poris puncto in foramine versantur, singulæ pari velocitate profiliant, liquet communem omnium velocitatem eam esse, qua percurratur tempore  $T$  spatium

$$2 A \times \frac{571}{1000}, \text{ sive velocitatem } V \times \frac{571}{1000}. \text{ Hæc autem}$$

ea est, quacum aqua in vacuo profilire possit ad tertiam fere partem altitudinis aquæ supra foramen.

7. Atqui, cum sursum vertitur aquæ motus, ut in fontibus salientibus, profilire cernuntur fontes ad altitudinem aquæ in cisterna pene integram. Profilit ergo ex foramine aqua, aut aliqua saltem aquæ portio, cum velocitate  $V$  pene integra, certe velocitate multo majori quam  $V \times \frac{571}{1000}$ .

8. Hinc certissime liquet particulas aqueas, quæ eodem temporis puncto in foramine versantur, non omnes erumpere cum eadem velocitate, sive nullam esse velocitatem omnibus communem. Contrarium hactenus pro indubitato habuerunt Mathematici.

9. Ad parvam a foramine distantiam, venæ aqueæ erumpentis diameter multo minor est diametro foraminis. Nempe, si foraminis diameter sit 1, erit venæ aqueæ diameter  $\frac{21}{25}$ , sive 0,84 mensurante *Newtono*, qui mirabile hoc phænomenon primus animadvertit; ex mensuris *Poleno* captis erit  $\frac{20}{26}$ , vel  $\frac{20,5}{26}$ ; hoc est, si diametrum intermediam ceperis, 0,78 fere.

His expositis, progrediendum est deinceps ad solutionem horum phænomenon expediendam: id vero antequam fiat, ex usu erit lectorem pauca præmonere.

1. Aquam nos non aliter consideramus, quam ut corpus fluidum, continuum, cujus partes vi minimæ illatæ cedunt, & cedendo moventur inter se.

2. Per aquam effluentem intelligimus eam aquæ copiam, quæ actu ex foramine egreditur: Quod, etsi minus necessarium videri possit, monendum tamen idcirco duximus, quod in *Dissertatione* nostra de *Motu aquarum fluentium* ante annos circiter 24 *Actis Philosophicis* inserta, aquæ defluentis nomine designata fuerit tota illa aquæ copia, quæ intra vas in motu constituta est, & versus foramen descendit.

3. Vasis amplitudinem pro infinita habemus, aut tanta saltem, ut in eo decrementum altitudinis aquæ toto temporis spatio, quo aqua ex foramine effluit, sensu percipi nequeat.

4. Aquam consideramus ut effluentem constanti velocitate. Nimirum ipso motus initio per minimum temporis spatium effluit aqua minori velocitate, quam mox elapsura sit. Nos autem ipsum motus initium præterimus, & tum demum investigamus aquæ *Mensuram & Motum*, cum integram velocitatem, quanta fieri potest, comparaverit. Hæc autem constans sit, necesse est, dum constet aquæ superincumbentis altitudo.

5. Fundum vasis non aliter concipimus quam ut planum mathematicum, vel laminam saltem eatenus tenuem, ut ejus crassities quasi nulla sit respectu diametri foraminis.

6. Per *Mensuram aquæ effluentis* in sequentibus semper intelligimus eam aquæ copiam, quæ ex foramine erumpit illo temporis spatio, quo corpus grave in vacuo cadens percursurum sit altitudinem aquæ supra foramen.

7. Per

7. Per *Motum aquæ effluentis* intelligimus summam motuum omnium aquæ particularum, quæ supradicto temporis spatio ex foramine erumpunt. Motus vero cuiusque particulæ est, ut factum ex ipsa particula & velocitate quacum ex foramine erumpit.

8. Quo facilius animo concipiantur sequentia, casus simpliciores primo proponemus, deinde ad magis compositos, sed propius ad verum rerum statum accedentes, progrediemur.

Nempe in problemate primo, quo simplicior evadat solutio, ponimus aquam ex foramine in vacuum effluere, aqueasque particulas, dum versus foramen descendunt, omni carere resistentia ex defectu lubricitatis oriunda.

In secundo & tertio problemate ponitur adhuc effluxus aquæ in vacuo institui; sed concipimus particulas aqueas, dum versus foramen descendunt, nonnullam ex defectu lubricitatis experiri resistentiam, tantulam tamen, ut decrementum *Motus* aquæ ex foramine effluentis, exinde ortum, pro nihilo haberi possit.

In quarto & quinto, vacui positionem adhuc retinemus; at sensibile ponitur decrementum *Motus* aquæ effluentis, ex defectu lubricitatis.

Tandem in problemate sexto & sequentibus rem consideramus prout revera se habet, cum in aëre res transigitur, adeo ut particulæ aquæ resistentiam sensibilem patiantur, non modo a sese invicem per defectum lubricitatis, intra vas, sed etiam post exitum e vase, per attritum aëris ambientis.

## P R O B L E M A I.

*Definire Motum, Mensuram, & velocitatem aquæ in vacuum effluentis per foramen in fundo vasis, ubi particule aquæ nullam patiuntur resistantiam ex defectu lubricitatis.*

Dum foramen obturaculo occluditur, sustinet obturaculum pondus columnæ aquæ ipsi ad perpendicularum incumbentis. Remoto obturaculo, columna aquæ foramini ad perpendicularum imminens, cum non amplius sustineatur, pressione sua efficiet, ut aqua per foramen defluat, & postquam eam ad debitam velocitatem compulerit, deinceps constanti sua pressione constantem aquæ effluentis velocitatem conservabit.

Concipiendum est quidem, *Motum* aquæ ex foramine effluentis non a pondere solius columnæ perpendicularis ortum ducere, sed partim ex hujus columnæ pressione, partim ex pressione aquæ circumpositæ derivari. Sed hoc pacto neque major neque minor fit *Motus* aquæ effluentis, quam si ex pressione solius columnæ perpendicularis oriretur: Non minor, quia pressio columnæ perpendicularis, si non impediatur, *Motum* sibi proportionalem generabit, impediri autem non potest nisi quatenus aqua circumposita urget aquam effluentem: non major, quia pressio aquæ circumpositæ non potest aliquid conferre ad *Motum* aquæ effluentis, nisi tantundem demat ex pressione columnæ perpendicularis.

Causa igitur adæquata *Motus* aquæ ex foramine effluentis, est pressio sive pondus columnæ aquæ, quæ foramini insistit. At vis data, quocunque modo  
ap-

applicetur, dato tempore datam generat *Motus* quantitatem versus easdem partes, quo tendit vis. Parem itaque *Motus* quantitatem dato tempore generat columnæ incumbentis pondus in aqua effluente, atque generare posset eodem tempore in ipsa columna libere per vacuum cadente.

Jam quoniam, per hypothefin, particulæ aqueæ nullam experiuntur resistantiam ex defectu lubricitatis, & omnes illæ particulæ, quæ jamjam exituræ in ipso foramine versantur, æquali urgentur pressione aquæ superincumbentis, liquet harum omnium æqualem esse velocitatem.

Sit  $v$  communis ista velocitas;  $a$  altitudo unde cadendo in vacuo comparetur ea velocitas;  $A$  altitudo aquæ supra foramen;  $V$  velocitas quæ comparetur cadendo in vacuo ex altitudine  $A$ ;  $T$  tempus cadendi ex eadem altitudine;  $F$  area foraminis; & effluat aqua ex foramine per tempus  $T$ .

Jam quoniam tempore  $T$  velocitate  $V$  percurratur spatium  $2A$ , percurratur eodem tempore velocitate  $v$  spatium  $\frac{2Av}{V}$ . Hæc itaque erit longitudo columnæ aqueæ, quæ effluit ex foramine tempore  $T$ ; eritque magnitudo hujus columnæ, sive *Mensura* aquæ effluentis tempore  $T$ ,  $\frac{2AvF}{V}$ , & *Motus* ejusdem erit  $\frac{2AFv^2}{V}$ .

*Motus* autem, qui eodem tempore  $T$ , in columna aquea foramini insistente generari possit, si suo ipsius pondere per vacuum feratur, sic habetur.

Erit

Erit ejus velocitas  $V$ , & cum magnitudo ejusdem sit  $AF$ , erit ejus *Motus*  $AFV$ .

Atqui *Motus* iste, ex suprapositis, æqualis est *Motui* columnæ aquæ effluentis tempore  $T$ , sive  $AFV = \frac{2AFv^2}{V}$ .

Hinc autem  $V = \frac{2v^2}{V}$ , sive  $v^2 = \frac{V^2}{2}$ , &  $v = \frac{V}{\sqrt{2}}$ .

Porro *Mensura* supraposita aquæ effluentis tempore  $T$ , sive  $\frac{2AFv}{V} = \frac{2AF}{V} \times \frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{2AF}{\sqrt{2}} = AF \times \sqrt{2}$ . Q. E. I.

COROLL. I. Cum sit  $a : A :: v^2 : V^2$ ; erit  $a = \frac{Av^2}{V^2}$ , hoc est,  $a = \frac{A}{V^2} \times \frac{V^2}{2}$ , sive  $a = \frac{A}{2}$ . Ita-

que altitudo  $a$ , quam effluens aqua motu sursum verso attingere queat, dimidia est altitudo aquæ in vase supra foramen. Quæ est ipsa altitudo *Newtono* definita *Prop. 36. Lib. II. Princip.* Editionis primæ.

COROLL. II. Si tribuatur aquæ effluenti ea velocitas, quæ comparatur cadendo ex integra altitudine aquæ supra foramen, hoc est, si ponatur velocitas

$v = V$ , erit *Motus* aquæ supra definitus  $\frac{2AFv^2}{V} =$

$AFV$ , sive du plus ejus *Motus*, qui a columna foramini incumbente generari possit, & proinde non nisi a duplo hujus columnæ generandus; quod docuit *Newtonus Corollario secundo, Prop. 36. Lib. II. Princip. Edit. 2 & 3.*

## S C H O L I U M.

*Mensura* hic determinata,  $\frac{2 AF}{\sqrt{2}}$ , sive  $2 AF \times 0,707$ , ut longe deficit ab ea, quæ vulgo Mathematicis statuitur, nempe  $2 AF$ , ita longe superat illam *Mensuram*, quam exhibent *Poleni* experimenta, sive  $2 AF \times 0,571$ . Nec mirum: quod enim ponitur in hoc problemate, carere omni resistantia particulas aqueas inter defluendum, hypothesis est a vero rerum statu aliena.

## P R O B L E M A II.

*Definire Motum, Mensuram & velocitatem aque in vacuum effluentis per foramen circulare in medio fundo vasis cylindrici, ubi particule aquæ resistantiam patiuntur ex defectu lubricitatis, sed tam parvam, ut decrementum Motus aquæ effluentis exinde ortum pro nihilo haberi possit.*

Sit vas cylindricum immensum  $ABCD$ , Fig. 1.  $EF$  foramen circulare in medio fundo factum, & aqua in hoc vase quiescente prorsus & immota, detrahatur obturaculum a foramine, ut pateat exitus aquæ per foramen.

Tum quoniam aqua hæcenus immota fuerit, & jam per foramen effluere incipit, & effluentem sequitur aqua supraposita, & motus naturalis aquæ nulla de super affusione perturbatur, & foramen obtinet ipsum fundi medium, induet sese necessario illa aquæ portio, quæ in motu versatur, & versus foramen descendit,  
in

in figuram aliquam regularem *AHEFKB*, cujus basis inferior sit ipsum foramen, basis autem superior sit superficies aquæ suprema *AB*, & sectiones omnes horizontales sint circulares. Hanc vocamus *Cataractam*; qualis autem sit *Cataractæ* figura, nondum disputamus: in præsentī sufficit nostro instituto, ut animadvertamus regularem esse, & per singulas ejus sectiones horizontales eandem aquæ copiam dato tempore transire.

Jam quoniam omnis illa aqua, quæ deorsum fertur, *Cataracta* continetur, patet reliquam aquam *AHEC, BKFD*, quæ extra *Cataractam* sita est, omni motu carere, & penitus quiescere. Itaque in sectione quavis horizontali *Cataractæ HcK*, cujus centrum *c*, puncta *H, K* repræsentabunt limites inter aquam descendentem versus foramen, & aquam circumpositam quiescentem.

Porro, cum punctum *K* sit limes motus & quietis, & particulæ aquæ, dum moventur inter se, resistentiam patiantur ex defectu lubricitatis, particula aquæ  $\alpha$ , Fig. 2. intra *Cataractam* sita, & adjacens puncto *K*, non poterit nisi quam minima velocitate deorsum ferri. Alioqui, necessario secum abriperet particulam proximam *a* extra *Cataractam* positam, contra hypothesein. Particula autem  $\beta$ , quæ particulæ  $\alpha$  introrsum contigua est, nonnisi quam minima velocitate relativa descendet respectu particulæ  $\alpha$ ; cum alioqui particulam  $\alpha$  accelerando eam secum abriperet, & hæc particula  $\alpha$ , jam celerius mota, abriperet secum particulam *a*. Pariter particula  $\gamma$  magis introrsum posita, & particulæ  $\beta$  contigua, descendet quam minima velocitate relativa respectu particulæ  $\beta$ ; & reliquæ particulæ  $\delta$ ,  $\epsilon$ , &c. aliæ aliis magis introrsum sitæ, descendent

dent velocitate quam minima relativa respectu particularum singulis extrorsum adjacentium. Hac autem ratione velocitas absoluta particularum crescat necesse est gradatim a limite versus centrum  $c$ , ut velocitas aquæ sit maxima in ipso centro, minima in limite utroque  $K$  &  $H$ .

Necesse vero est, ut resistantia, quam experitur particula quæque celerior ex affricu adjacentis particulæ tardioris extrorsum positæ, perpetuo sibi æqualis sit per totam sectionem *Cataractæ*. Alioqui, particula illa, quæ majorem patitur resistantiam, accelerabit particulam tardiozem adjacentem, donec minuatur hoc pacto resistantia, & fiat æqualis illi resistantiæ, quam patiuntur cæteræ particulæ. At si resistantia sit ubique sibi æqualis per totam *Cataractæ* sectionem, erit & velocitas relativa particularum ubique æqualis, cum altera alteram necessario consequatur.

Ergo velocitas absoluta cujuslibet particulæ, quæ est summa velocitatum omnium relativarum ab ambitu sectionis ad eam usque particulam simul sumptarum, est in ratione distantiae ejusdem particulæ ab ambitu *Cataractæ*.

His expositis, sit modo  $r$  radius foraminis,  $m$  ad 1 in ratione peripheriæ ad diametrum,  $mr^2$  area foraminis,  $v$  velocitas quacum aqua descendit in centro foraminis,  $a$  altitudo unde cadendo in vacuo comparetur velocitas  $v$ ,  $A$  altitudo aquæ supra foramen,  $V$  velocitas quæ comparetur cadendo in vacuo ex altitudine  $A$ ,  $T$  tempus cadendi ex eadem,  $z$  distantia cujuslibet particulæ a centro foraminis, & effluat aqua tempore  $T$ .

Jam *Mensura* aquæ, quæ tempore  $T$  ex foramine egreditur, ad hunc modum invenietur.

Erit  $z$  radius circuli cujuslibet intra foramen,  $2mz$  circumferentia ejusdem,  $2mzz$  annulus nascens ei circumferentiæ adjacens,  $\frac{v \times r - z}{r}$  velocitas aquæ in annulo nascente.

Cumque fit  $V : v \times \frac{r - z}{r} :: 2A : \frac{2Av \times r - z}{Vr}$ ,  
erit  $\frac{2Av \times r - z}{Vr}$  spatium, quod conficit aqua per annulum nascentem fluens tempore  $T$ , & *Mensura* ejusdem aquæ erit  $2mzz \times \frac{2Av \times r - z}{Vr} =$   
 $\frac{4mAv \times rz - z^2z}{Vr}$ .

At *Mensura* aquæ per annulum nascentem transcurrentis est fluxio *Mensuræ* aquæ transeuntis per circum, cui radius  $z$ . Est itaque *Mensura* aquæ, quæ tempore  $T$  transiit per hunc circum, quantitas fluens

fluxionis modo expositæ  $\frac{4mAv}{Vr} \times rz - z^2z$ , i. e.

$$\frac{4mAv}{Vr} \times \frac{3rz^2 - 2z^3}{6} = \frac{2mAv}{3Vr} \times 3rz^2 - 2z^3.$$

Et ponendo  $z = r$ , habebitur *Mensura* aquæ per totum foramen transeuntis tempore  $T$ , nempe  $\frac{2mAvr^2}{3V}$ .

*Motus* vero aquæ ejusdem sic habebitur.

*Mensura*

*Mensura* aquæ tempore  $T$  effluentis per annulum nascentem est, ut modo perspeximus,  $\frac{4 m A v}{V r} \times r z \dot{z} - z^2 \dot{z}$ , & cum velocitas ejusdem sit  $v \times \frac{r - z}{r}$ , erit ejus *Motus*  $\frac{4 m A v}{V r} \times r z \dot{z} - 2 z^2 \dot{z} \times \frac{v}{r} \times r - z = \frac{4 m A v^2}{V r^2} \times r^2 z \dot{z} - 2 r z^2 \dot{z} \times z^3 \dot{z}$ , cujus quantitas fluens est  $\frac{4 m A v^2}{V r^2} \times \frac{r^2 z^2}{2} - \frac{2 r z^3}{3} + \frac{z^4}{4} = \frac{m A v^2}{3 V r^2} \times 6 r^2 z^2 - 8 r z^3 + 3 z^4$ , qui est *Motus* aquæ transeuntis per circulum cui radius  $z$ . Et posita  $z = r$ , habetur *Motus* aquæ effluentis tempore  $T$  per totum foramen,  $\frac{m A v^2 r^2}{3 V}$ .

Hic autem *Motus*, per solutionem *Problematis* primi, & hypothesin hujus, æqualis est *Motui*, quem columna foramini insitens comparare possit eodem tempore  $T$ , suo ipsius pondere per vacuum cadendo, hoc est, *Motui*  $AFV$ , sive  $AV \times m r^2$ . Itaque  $\frac{m A v^2 r^2}{3 V} = m A V r^2$ .

Hinc autem  $v^2 = 3 V^2$ , &  $v = V \times \sqrt{3}$ .

Porro *Mensura* supraposita aquæ effluentis per foramen tempore  $T$ , nempe  $\frac{2 m A v r^2}{3 V} = \frac{2 m A r^2}{3 V} \times V \times \sqrt{3} = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ . Q. E. I.

COROLL. I. Cum sit  $V^2 : v^2 :: A : a$ , erit  $a = \frac{A v^2}{V^2} = \frac{A}{V^2} \times 3 V^2 = 3 A$ . Itaque altitudo, ad quam aqua in vacuo proflire possit ea velocitate, quacum effluit in centro foraminis, tripla est altitudinis aquæ supra foramen.

COROLL. II. *Cataractæ* figura ad hunc modum definitur:

Sit  $HK$ , Fig. 3. quælibet sectio *Cataractæ*, cujus centrum  $c$ , sitque ejus radius  $cK = y$ , altitudo aquæ supra istam sectionem, sive  $Ic = x$ ,  $t$  tempus cadendi in vacuo ex altitudine  $x$ , sitque, ut prius,  $LF = r$ , &  $IL = A$ .

Jam transit aqua per hanc sectionem  $HK$  eadem copia atque effluit ex foramine  $EF$ .

Quod si vas eo usque decurtetur, ut ejus altitudo redigatur ex  $IL$  ad  $Ic$ , adeoque sectio ista  $HK$  jam fiat ipsum foramen in fundo vasis, transibit aqua dato tempore, per hanc sectionem, copia neque majori, neque minori, atque prius transierat per eandem, vase nondum decurtato: non majori, quia non urgetur ista sectio nisi eodem columnæ superincumbentis pondere, quo prius urgebatur; non minori, quia aqua inferior  $HKFE$  non obstat motui aquæ per sectionem  $HK$  transituræ.

Vase autem decurtato, *Mensura* aquæ effluentis ex foramine  $HK$  tempore  $t$ , per solutionem præcedentem, est  $\frac{2 x m y^2}{\sqrt{3}}$ , & *Mensura* aquæ effluentis tempore

$T$  est  $\frac{2 x m y^2}{\sqrt{3}} \times \frac{T}{t} = \frac{2 x m y^2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}}$ . Nam  $T : t :: \sqrt{A} : \sqrt{x}$ .

Sed,

Sed, ex supradictis, *Mensura* aquæ tempore dato *T* effluentis ex foramine *HK* vase decurtato, æqualis est *Mensuræ* aquæ eodem tempore transeuntis per sectionem *HK* vase integro, sive *Mensuræ* aquæ eodem tempore effluentis ex foramine *EF*. Itaque  $\frac{2 x m y^2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{x}} = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ , sive  $y^2 \sqrt{x} = r^2 \sqrt{A}$ , vel  $y^4 x = r^4 A$ , quæ est ipsa æquatio curvæ hyperbolicæ, cujus rotatione figuram *Cataractæ* gigni olim ostendimus in *Actis Philosophicis* Numero 355.

#### SCHOLIUM I.

*Mensura* aquæ supra inventa  $\frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ , sive  $2 A m r^2 \times 0,577350$  tantillo major est *Mensura*  $2 A m r^2 \times 0,571$ , quæ ex Cl. *Poleni* experimentis elicitur. Hoc autem differentiæ, aliqua saltem ex parte, inde provenit, quod in hoc problemate decrementum *Motus* aquæ ex resistentia ortum pro nihilo habuimus.

#### SCHOLIUM II.

Recte se habet *Mensura* aquæ effluentis hac solutione definita, si altitudinem vasis pro infinite magna habeamus respectu diametri foraminis. Cum vero hæc altitudo finitam rationem obtinet ad diametrum foraminis, paulo minor erit *Mensura*, ita tamen, ut cum altitudo quinquies major sit diametro, non nisi

parte  $\frac{1}{32000}$ , & cum dupla sit diametri, non nisi parte

$\frac{1}{5120}$  circiter, a vero aberret, quæ differentiæ minores

nores sunt quam ut ullo experimento deprehendi queant.

Tantillum autem hoc discrimen exinde proficiscitur, quod velocitas supradicta relativa, & proinde ipsa velocitas absoluta particularum aquæ, quas consideravimus ut in directione ad horizontem perpendiculari, revera obtinent directionem paululum obliquam, cum propius ad axem *Cataractæ* accedat quæque particula inter descendendum.

Quod si aliquis desiderio teneatur solutionem veram & accuratam consequendi, cum altitudo aquæ quæcunque rationem obtinet ad diametrum foraminis, eam hunc in modum consequi poterit.

Ex curvæ *Cataracticæ* proprietate corollario secundo hujus problematis exposita, qua  $y^4 x = r^4 A$ , subtangens hujus curvæ ad ambitum foraminis invenietur  $4A$ , & ad ambitum cujuscunque sectionis subtangens erit  $4x$ , æqualis scilicet altitudini aquæ supra illam sectionem quater sumptæ.

Curvam vero ejusmodi *Cataracticam* describit non modo aqua exterior, quæ foraminis ambitum præterfluit, sed etiam illa pars aquæ, quæ per quemlibet foraminis annulum effluit; i. e. unaquæque particula aquea curvam ejusmodi describit.

Sit modo  $z$  distantia cujuscunque particulæ in foramine positæ, a centro foraminis, & descendat hæc particula per spatium quam minimum in tangente ad curvam *Cataracticam*. Hinc erit ejus velocitas in directione hujus tangentis, sive velocitas  $v \times \frac{r-z}{r}$ ,

quæ in hoc problemate exposita est, ad velocitatem ejusdem in directione ad horizontem perpendiculari, ut  $\sqrt{16A^2 + z^2} : 4A$ .

Est

Est itaque velocitas in directione ad horizontem perpendiculari,  $v \times r - z \times \frac{4A}{\sqrt{16A^2 + z^2}}$ .

Hinc autem, insistendo vestigiis solutionis superioris, habebis pro *Mensura* aquæ per annulum nascentem transeuntis,  $\frac{16mA^2v}{rV} \times \frac{rzz - z^2z}{\sqrt{16A^2 + z^2}}$ .

Hujus vero fluxionis quantitas fluens, per *Mensuras* rationum *Cotesianas*, Form. V. & VI. invenietur  $\frac{16mA^2v}{rV} \times \frac{2r-z}{2} \sqrt{16A^2 + z^2} + 8A^2 \left| \frac{z + \sqrt{16A^2 + z^2}}{4A} \right|$ ;

& ponendo primum  $z = 0$ , deinde  $z = r$ , habebis  $\frac{16mA^2v}{rV} \times \frac{r}{2} \sqrt{16A^2 + r^2} - 4Ar + 8A^2 \left| \frac{r + \sqrt{16A^2 + r^2}}{4A} \right|$

pro *Mensura* aquæ per totum foramen transeuntis tempore  $T$ .

Porro, similem in modum procedendo, habebis pro *Motu* aquæ per annulum nascentem transeuntis,

$\frac{64mA^3v^2}{r^2V} \times \frac{r^2z - 2rz^2 + z^3z}{16A^2 + z^2}$ , cujus fluxionis quantitas fluens, per Formam I. & II. *Cotesianam*, reperietur  $\frac{64mA^3v^2}{r^2V}$  in  $\frac{z^2 - 4rz}{2} + \frac{r^2}{2} \left| \frac{16A^2 + z^2}{16A^2} - \frac{16A^2}{2} \left| \frac{16A^2 + z^2}{16A^2} + 2r\sqrt{-16A^2} \right| \frac{z + \sqrt{-16A^2}}{\sqrt{16A^2 + z^2}} \right|$

& ponendo  $z = r$ , habebis  $\frac{64mA^3v^2}{r^2V}$  in  $\frac{r^2 - 16A^2}{2} \left| \frac{16A^2 + r^2}{16A^2} + 2r\sqrt{-16A^2} \right| \frac{r + \sqrt{-16A^2}}{\sqrt{16A^2 + r^2}} - \frac{3r^2}{2}$ ,

qui

qui est *Motus* aquæ transeuntis per foramen tempore  $T$ .

$$\text{Sit jam } M = \frac{r}{2} \sqrt{16 A^2 + r^2},$$

$$N = 8 A^2 \left| \frac{r + \sqrt{16 A^2 + r^2}}{4 A} \right|, \text{ vel}$$

$$N = 4 A^2 \left| \frac{16 A^2 + 2 r^2 + 2 r \sqrt{16 A^2 + r^2}}{16 A^2} \right|,$$

$$K = \frac{r^2 - 16 A^2}{2} \left| \frac{16 A^2 + r^2}{16 A^2} \right|, \&$$

$$L = 2 r \sqrt{-16 A^2} \left| \frac{r + \sqrt{-16 A^2}}{\sqrt{16 A^2 + r^2}} \right|, \text{ vel}$$

$L = 2 r \times 4 A$  (Rad : Tang : Sec ::  $4 A : r : \sqrt{16 A^2 + r^2}$ ), & *Mensura* aquæ per foramen transeuntis tempore  $T$ , erit  $\frac{16 m A^2 v}{r V} \times \frac{M + N - 4 A r}{2}$ ;

*Motus* vero ejusdem aquæ erit  $\frac{64 m A^3 v^2}{r^2 V} \times \frac{L + K - \frac{3}{2} r^2}{2}$ .

Sed  $\frac{64 m A^3 v^2}{r^2 V} \times \frac{L + K - \frac{3}{2} r^2}{2} = m r^2 A V$ , unde

$$v^2 = \frac{r^4 V^2}{64 A^2 \times \frac{L + K - \frac{3}{2} r^2}{2}} \& \text{ *Mensura* aquæ per}$$

foramen effluentis tempore  $T$ , est  $2 m A r \times \frac{M + N - 4 A r}{\sqrt{L + K - \frac{3}{2} r^2}}$ .

Sin

Sin autem pro Mensuris rationum & angulorum adhibere malis series infinitas, erit supraposita *Mensura* aquæ per anulum nascentem effluentis,  $\frac{16 m A^2 v}{r V}$

$\times \frac{r z z - z^2 z}{\sqrt{16 A^2 + z^2}}$ , ad hanc formam reducenda,  $\frac{m v}{r V}$

$\times \frac{16 A^2}{\sqrt{16 A^2 + z^2}}$ ; & reducendo

$\frac{16 A^2}{\sqrt{16 A^2 + z^2}}$  ad seriem infinitam, habebis  $\frac{m v}{r V}$

$\times r z z - z^2 z$  in  $4 A - \frac{z^2}{8 A} + \frac{3 z^4}{8^3 A^3} - \frac{5 z^6}{4 \times 8^4 A^5} + \frac{35 z^8}{8^7 A^7} - \&c.$  pro *Mensura* aquæ per anulum nascentem effluentis; & per hujus fluxionis quantitatem fluentem, sive per  $\frac{m v}{V}$  in  $\frac{2 A r^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \frac{r^6}{14 \times 8^3 A^3} - \frac{5 r^8}{36 \times 8^5 A^5} + \frac{7 r^{10}}{22 \times 8^7 A^7} - \&c.$  exponetur *Mensura*

aquæ effluentis per foramen integrum.

Porro *Motus* suprapositus aquæ per anulum nascentem transeuntis,  $\frac{64 m A^3 v^2}{r^2 V} \times \frac{r^2 z z - 2 r z^2 z + z^3 z}{16 A^2 + z^2}$

$= \frac{4 m A v^2}{r^2 V} \times \frac{r^2 z z - 2 r z^2 z + z^3 z}{16 A^2 + z^2} \times \frac{16 A^2}{16 A^2 + z^2}$

$= \frac{4 m A v^2}{r^2 V} \times \frac{r^2 z z - 2 r z^2 z + z^3 z}{16 A^2 + z^2} \times \frac{z^2}{16 A^2}$

$+ \frac{z^4}{16^2 A^4} - \frac{z^6}{16^3 A^6} + \frac{z^8}{16^4 A^8} - \frac{z^{10}}{16^5 A^{10}} + \&c.$

Et per fluxionis hujus quantitatem fluentem, sive per

$$\frac{4mAv^2}{V} \text{ in } \frac{r^2}{12} - \frac{r^4}{60 \times 16 A^2} + \frac{r^6}{168 \times 16^2 A^4} - \frac{r^8}{360 \times 16^3 A^6} + \frac{r^{10}}{660 \times 16^4 A^8} - \&c. \text{ exponetur Motus}$$

aquæ per foramen integrum effluentis.

$$\text{Ergo } Amr^2 V = \frac{4mAv^2}{V} \text{ in } \frac{r^2}{12} - \frac{r^4}{60 \times 16 A^2} + \&c.$$

$$\text{sive } Vz = v^2 \text{ in } \frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c. \text{ vel}$$

$$v^2 = \frac{Vz}{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}$$

$$\&c. v = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}$$

Unde *Mensura* aquæ effluentis per foramen, sive

$$\frac{mv}{V} \text{ in } \frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \frac{r^6}{14 \times 8^3 A^3} - \frac{5r^8}{36 \times 8^5 A^5} + \&c.$$

$$= \frac{m}{V} \text{ in } \frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \frac{r^6}{14 \times 8^3 A^3} - \frac{5r^8}{36 \times 8^5 A^5} + \&c.$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}$$

$$= m \text{ in } \frac{2Ar^2}{3} - \frac{r^4}{20 \times 8 A} + \&c.$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{r^2}{15 \times 16 A^2} + \&c.}$$

$$\text{Unde tandem } Mensura \text{ aquæ effluentis per foramen}$$

$$\text{habetur } \frac{2Amr^2}{\sqrt{3}} \text{ in } 1 - \frac{r^2}{20 \times 16 A^2} + \frac{r^4}{56 \times 16^2 A^4} - \&c.$$

Hinc

Hinc ponendo  $A$  infinitam respectu diametri foraminis, evadit  $Mensura = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ , ut in *Problemate* hoc determinavimus.

Cum  $A = 10 r$ ,  $Mensura = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}} \times 1 - \frac{1}{32000}$  circiter.

Cum  $A = 4 r$ ,  $Mensura = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}} \times 1 - \frac{1}{5120}$  circiter.

Potest itaque loco veræ *Mensuræ* adhiberi *Mensura*  $\frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ , sine periculo sensibilis erroris, etiam in tantula altitudine, multo magis in altitudine multis vicibus majori, qualis fere in experimentis adhiberi consuevit; & hoc pacto computus ex operoso admodum & intricato facillimus evadit.

### P R O B L E M A III.

*Iisdem positis, & negligendo accelerationem aquæ extra foramen, determinare diametrum venæ aqueæ ad parvam distantiam extra foramen, ubi vena maxime contrahitur, & velocitatem aquæ in vena sic contracta.*

In problematis superioris solutione ostensum fuit, particulas aqueas ex foramine erumpentes non una omnibus communi velocitate profilire, sed eo velocius ferri, quo propius absunt a centro foraminis; & velocitatem relativam particularum interiorum, respectu particularum singulas extrorsum contingentium, con-

stanter sibi æqualem fieri per totum foramen ; & relativam hanc velocitatem proficisci ex resistantia, quam ab aqua circumposita patitur aqua versus foramen descendens.

At postquam aqua ex foramine egressa est, ejusque superficies exterior nullam jam patitur resistantiam ab aqua circumposita, nec etiam ab aëre ambiente, quippe quæ ex hypothese per vacuum feratur, fieri nequit ut amplius persistet illa velocitas relativa, aut velocitatis absolutæ inæqualitas. Jam enim particulæ celeriores accelerent necesse est particulas tardiores contiguas, & ipsæ vicissim a tardioribus retardentur, donec universæ unicam velocitatem sortitæ fuerint particulis omnibus communem ; quod intra parvum spatium fiet, postquam ex foramine fuerint egressæ.

Dum vero communem hanc velocitatem consequuntur omnes particulæ, contrahitur necessario venæ diameter. Similiter nempe hic res accidit, atque cum flumen rapidius cum tardiori, *Rhodanus* puta cum *Arare*, conjungitur. In alveo communi par est velocitas aquæ ex utroque flumine advectæ, & pari copia transmittitur aqua per sectionem hujus alvei, atque prius transmissa fuerat per sectiones fluminum amborum : Sed longe minor est *Rhodani* sectio post *Ararim* receptum, quam summa sectionum *Rhodani* & *Araris*, priusquam confluant.

Sit igitur venæ aqueæ contractæ, ubi omnes particulæ in eadem venæ sectione sitæ æqualem velocitatem adeptæ fuerint, radius  $p$ , & communis ista velocitas vocetur  $v$ .

Jam *Mensura* aquæ per venæ contractæ sectionem transfluentis tempore  $T$  sic habebitur.

Est  $V : v :: 2 A : \frac{2 A v}{V}$ , quæ est longitudo venæ aqueæ per hanc sectionem transeuntis tempore  $T$ . Estque  $\frac{2 A v}{V} \times m \rho^2$  *Mensura* aquæ per hanc sectionem transeuntis eodem tempore.

Et *Motus* aquæ per sectionem venæ transeuntis tempore  $T$ , est  $\frac{2 A v}{V} \times m \rho^2 \times v$ , sive  $\frac{2 A m \rho^2 v^2}{V}$ .

Atqui *Mensura* aquæ per venæ sectionem transeuntis æqualis est *Mensuræ* aquæ per foramen eodem tempore effluentis, hoc est,  $\frac{2 A m \rho^2 v}{V} = \frac{2 A m r^2}{\sqrt{3}}$ , sive  $2 \rho^2 v = \frac{2 r^2 V}{\sqrt{3}}$ .

Porro *Motus* aquæ ex foramine erumpentis, cum non mutetur ex actione particularum inter se, æqualis erit *Motui* aquæ per venæ sectionem transfluentis, hoc est  $A V m r^2 = \frac{2 A m \rho^2 v^2}{V}$ , sive  $2 \rho^2 v^2 = r^2 V^2$ .

Est autem  $v = \frac{2 \rho^2 v^2}{2 \rho^2 v} = r^2 V^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2 r^2 V}$ , hoc est  $v = \frac{V \sqrt{3}}{2}$ , &  $v^2 = \frac{3 V^2}{4}$ .

Et  $\rho^2 = \frac{r^2 V^2}{2 v^2} = \frac{r^2 V^2}{2} \times \frac{4}{3 V^2}$ , sive  $\rho^2 = \frac{2 r^2}{3}$ , &  $\rho = \frac{r \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ . Q. E. I.

COROLL. Cum sit  $v^2 = \frac{3 V^2}{4}$ , altitudines autem sint in ratione duplicata velocitatum inde cadendo  
geni-

genitarum, patet eam esse velocitatem aquæ in vena contracta, qua sursum proflire queat in vacuo ad tres quartas partes altitudinis aquæ supra foramen.

# SCHOLIUM I.

Mirabilem hanc venæ aquæ contractionem primus omnium, ante annos fere 30, animadvertit *Newtonus*, cum occasione difficultatum quarundam ab altero illo *Britanniæ* lumine, & amico nostro nullis unquam lacrymis satis deflendo, *Rogero Cotesio*, propositarum, qui tunc temporis secundam *Principiorum* editionem adornabat, attentius in motum aquæ effluentis introspiceret: eandem postea pluribus experimentis confirmavit *Polenus*. Exinde philosophorum ingenia satis superque exercuit hoc phænomenon: sed omnes hæcenus latuit vera causa hujus contractionis.

Radius autem venæ hoc problemate definitus, nempe  $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , sive  $r \times 0,8165$ , paulo minor est radio  $r \times 0,84$ , quanta a *Newtono* traditur; paulo major radio  $r \times 0,78$ , qualis fere *Poleno* mensuranti contigit, estque pene inter utramque intermedia.

At velocitas supra determinata  $\frac{V\sqrt{3}}{2}$ , qua proflire sursum possit aqua ad tres quartas partes altitudinis vasis supra foramen, longe abest ab experimentis, quibus reperiuntur fontes salientes ad integram fere cisternæ altitudinem adsurgere. Provenit autem istud velocitatis discrimen ex aëris ambientis resistentia, quæ tantum abest ut minuat altitudinem salientium, quod vulgo creditur, eandem non parum auget, id quod ex *Problematis* septimi solutione patebit.

SCHOLIUM II.

Ex iis, quæ supra exposuimus in *Scholio 2. Problematis II.* patet valores hosce ipsarum  $\rho$  &  $v$ , pro accuratis haberi non posse, nisi altitudo aquæ pro infinita habeatur respectu diametri foraminis, proxime tamen ad veros valores accedere, si altitudo aquæ sit diametri foraminis dupla, aut duplo major. Quod si eosdem valores accurate velis determinare, adhibere poteris *Mensuram* eodem *Scholio* definitam, sive  $2 m A r \times \frac{M+N-4 A r}{\sqrt{L+K-\frac{3}{2} r^2}}$ , unde habebis  $v = \frac{r V \sqrt{L+K-\frac{3}{2} r^2}}{2 M+N-4 A r}$

&  $\rho = \sqrt{2} \times \frac{M+N-4 A r}{\sqrt{L+K-\frac{3}{2} r^2}}$ . Poteris etiam adhibere series infinitas eodem *Scholio* expostas.

PROBLEMA IV.

*Aqua in vacuum effluente ex foramine circulari in medio fundo vasis cylindrici, ubi particulae aquæ inter defluendum intra vas tantam patiuntur resistentiam ex defectu lubricitatis, ut inde notabiliter imminuatur Motus aquæ, & data Mensura aquæ effluentis, definire Motum ejusdem, & velocitatem qua per medium foramen egreditur.*

Sit data *Mensura* aquæ tempore  $T$  effluentis,  $2 m r^2 A q$ . Huic ergo æqualis erit *Mensura* per analysin designata in solutione *Problematis* secundi, nempe

nempe  $\frac{2mr^2 Av}{3V}$ , hoc est  $2mr^2 Aq = \frac{2mr^2 Av}{3V}$   
 five  $v = 3Vq$ .

*Motus* vero ejusdem aquæ per analysin designatus in eodem *Problemate*, est  $\frac{mr^2 Av^2}{3V}$ ; & loco  $v^2$  substituendo ejus valorem modo inventum, fit is  
*Motus*  $\frac{mr^2 A}{3V} \times 9V^2 q^2 = 3q^2 mr^2 AV$ . Q.E.I.

COROLL. Si ex *Motu*, qui tempore  $T$  generari possit a columna aquea foramini insistente, five ex  $mr^2 AV$ , detrahatur *Motus* aquæ eodem tempore effluentis,  $3q^2 mr^2 AV$ , relinquitur *Motus* tempore  $T$  ex resistentia deperditus  $mr^2 AV \times 1 - 3q^2$ .

# SCHOLIUM.

Si accuratam solutionem desideres, recurrendum est ad Scholium secundum Probl. II. hunc in modum;  $2mr^2 Aq = \frac{16m A^2 v}{rV} \times \frac{M+N-4Ar}{M+N-4Ar}$ , unde

$v = Vq \times \frac{r^3}{8A \times M+N-4Ar}$ . Et *Motus* aquæ effluentis tempore  $T$ , erit  $mr^2 AV \times q^2 r^2 \times \frac{L+K-\frac{3}{2}r^2}{M+N-4Ar}$ : unde *Motus* ex resistentia deperditus

tempore  $T$ , erit  $mr^2 AV \times 1 - \frac{q^2 r^2 \times L+K-\frac{3}{2}r^2}{M+N-4Ar}$ .

PROBLEMA V.

*Iisdem positis datisque, & negligendo accelerationem aquæ extra foramen, determinare diametrum venæ aquæ ad parvam distantiam extra foramen, ubi vena maxime contrahitur, & velocitatem aquæ in vena sic contracta.*

Per tertium *Problema*, *Mensura* aquæ per sectionem venæ transeuntis tempore  $T$  est  $\frac{2m_0^2 Av}{V}$ : hæc autem æqualis est *Mensuræ* datæ  $2mr^2 Aq$ ; unde  $\rho^2 v = r^2 Vq$ .

Porro, per idem *Problema* tertium, *Motus* aquæ per sectionem venæ transeuntis tempore  $T$ , est  $\frac{2m\rho^2 Av^2}{V}$ , cui æqualis est *Motus* superiore *problemate* definitus,  $3q^2 mr^2 AV$ , unde  $2\rho^2 v^2 = 3q^2 r^2 V^2$ .

$$\text{Est autem } v = \frac{2\rho^2 v^2}{2\rho^2 v} = \frac{3q^2 r^2 V^2}{2qr^2 V} = \frac{3qV}{2}.$$

$$\text{Et } \rho^2 = \frac{r^2 Vq}{v} = r^2 Vq \times \frac{2}{3qV} = \frac{2r^2}{3}; \text{ unde } \rho =$$

$$\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \text{ Q.E.I.}$$

COROLL. I. Eadem perstat ratio inter radium foraminis & radium venæ contractæ, sive minuatur utcunque per resistantiam *Motus* aquæ effluentis, ut in hoc *Problemate*, sive non minuatur, ut in *Problemate* III. cum sit utrobique  $\rho = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ .

COROLL. 2. Cum minuitur per resistantiam *Motus* aquæ effluentis, minuitur simul velocitas in vena contracta. Cum enim in *Problemate* tertio fuerat  $v = \frac{V\sqrt{3}}{2}$ , fit modo  $v = \frac{3qV}{2}$ , hoc est, minuitur  $v$  ex  $V \times 0,866$  ad  $V \times 0,856$  fumendo  $q = 0,571$  ex *Poleni* experimentis.

SCHOLIUM.

Accurate erit  $v = V \times r^2 q \times \frac{L + K - \frac{3}{2}r^2}{M + N - 4Ar}^2$ ,  
critque  $q = \sqrt{2} \times \frac{M + N - 4Ar}{\sqrt{L + K - \frac{3}{2}r^2}}$ , pariter atque inventum est in *Scholio* secundo *Problematis* tertii.

PROBLEMA VI.

*Aqua in aërem effluente per foramen circulare in medio fundo vasis cylindrici, ubi particule aquæ inter defluendum intra vas tantam patiuntur resistantiam ex defectu lubricitatis, ut inde notabiliter minuat Motus aquæ, & data Mensura aquæ effluentis, definire Motum ejusdem, & velocitatem qua per medium foramen egreditur.*

Sit data *Mensura* aquæ tempore  $T$  effluentis  $2mr^2Aq$ , ut in *Problemate* IV. & ope ejusdem *Problematis* habebitur *Motus* ejusdem  $3q^2mr^2AV$ , & velocitas quacum egreditur per centrum foraminis, sive  $v = 3qV$ . Q. E. I.

COROLL.

COROLL. Cum detur  $q$ , est  $v$  ut  $V$ , hoc est, ut  $\sqrt{A}$ .

### SCHOLIUM.

Hæc eadem accurate definita reperiēs in *Scholio Problematis IV*.

### PROBLEMA VII.

*Aqua in aërem effluente, negligendo accelerationem aquæ extra foramen ex gravitate ortam, si dentur duæ qualibet ex tribus sequentibus, nempe Mensura aquæ effluentis, velocitate in axe venæ contractæ, & diametro ejusdem venæ, reliquam determinare.*

Cum aqua ex foramine erumpens per vacuum fertur, ostensum est in solutione *Problematis III*. æqualem fieri velocitatem particularum aquæ per totam sectionem venæ contractæ: Nunc autem, cum vena per aërem fertur, tollitur necessario æqualitas ista velocitatis. Partes enim venæ exteriores aërem circumjacentem in motum concitant, atque ab eodem ipsæ retardantur, adeo ut parem cum reliquis velocitatem adipisci nequeant. Partes autem extimæ, cum ab aere retardentur, partes contiguas interiores retardant, hæque proximas; atque eo pacto fit, ut particula quæque interior celerius feratur particula contigua exteriore, adeo ut velocitas maxima sit in axe venæ, in ambitu minima. Et cum partes exteriores tardius ferantur per aërem, quam, sublato aëre, per vacuum ferrentur, inde fit ut partes mediæ velocius

ferantur, aëre venam ambiente, quam ferrentur aëre sublatō. Qua de causa mediæ partes aquæ in fontibus salientibus multo altius adsurgunt in aëre aperto, quam in vacuo essent adscensuræ, prout monuimus sub finem *Schol. 1. Probl. III.*

Porro, eæ partes aeris, quæ venæ aqueæ sunt contiguæ, cum ab aqua in motum concitentur, ipsæ alias sibi extrorsum adjacentes in motum concitant, hæque proximas exteriores, & illæ reliquas successive ad certam aliquam distantiam ab ambitu venæ.

Velocitas autem particularum aquæ ab axe venæ ad ambitum ejusdem ita decreseat, necesse est, ut particulæ cujusque ubicunque sitæ una eademque sit velocitas relativa respectu particulæ extrorsum adjacentis, iisdem ex causis quas exposuimus in solutione *Problematis* secundi. Nam si quævis particula velocitatem relativam majorem habeat quam reliquæ, ea majorem experietur resistantiam ex attritu particulæ extrorsum adjacentis, & eo pacto ad æqualem cum ceteris velocitatem relativam perducetur. Pari modo particula quæque aeris circumpositi, qui in motum concitatur, unam eamdemque habebit velocitatem relativam respectu particulæ aëreæ extrorsum adjacentis.

At longe discrepat velocitas relativa particularum aquearum inter se, a velocitate relativa particularum aeris, quod hoc modo concipi potest.

Particula quævis aquæ in extrema vena constituta, a particula aquæ introrsum proxima sollicitatur ad motum accelerandum; eadem a particula proxima aeris retardatur: & cum particula ista extrema justam velocitatem adepta sit, pares sint, necesse est, hæ duæ vires contrariæ, quarum altera retardat particulam, altera acce-

accelerat. Id vero fieri non potest, nisi factum ex velocitate relativa & densitate particulæ aqueæ accelerantis, æquale sit facto ex velocitate relativa & densitate particulæ aeræ retardantis. Est autem densitas aeris ad densitatem aquæ, ut 1 ad 900 circiter. Itaque velocitas relativa inter extimam particulam aqueam & proximam aeream, est ad velocitatem relativam inter duas proximas particulas aqueas, ut 900 ad 1 circiter.

Porro, particula ista intima aerea ad motum accelerandum sollicitatur a proxima contigua particula aquea, retardatur a particula aerea extrorsum proxima. Cumque hic etiam vires duæ contrariæ sibi invicem æquales sint, erit factum ex densitate & velocitate relativa particulæ aqueæ accelerantis, æquale facto ex densitate & velocitate relativa particulæ aeræ retardantis. Unde erit velocitas relativa, quæ est inter duas istas particulas aereas, ad velocitatem relativam, quæ est inter particulam intimam aeream & proximam aqueam, ut 900 ad 1 circiter; eritque eadem ad velocitatem relativam, quæ est inter duas proximas particulas aqueas, ut  $900 \times 900$  ad 1 fere: & hæc tanta velocitas relativa perpetuo sibi constabit per totam crassitiam annuli aerei, qui ab aqua profluente in motum concitatur.

Designentur jam literis  $r, m, v, a, V, A, T$ , eadem atque in secundo Problemate literis iisdem significantur. Esto etiam  $v$  velocitas aquæ in axe venæ aqueæ contractæ,  $\rho$  radius ejusdem venæ,  $R$  radius venæ imaginariæ, per quem velocitas  $v$ , decrescendo gradatim, pari modo atque decrescit in vena vera, tandem ad nihilum redigatur.

Sit etiam *Mensura* aquæ tempore  $T$  effluentis per foramen,  $2 q m r^2 A$ .

Jam *Mensura* aquæ eodem tempore fluentis per venam contractam, methodo in *Problemate* II. exposita, invenietur  $\frac{2 m A v \rho^2}{3 R V} \times \overline{3 R - 2 \rho}$ .

Hæ autem *Mensuræ* æquales sunt, hoc est,  
 $2 q m r^2 A = \frac{2 m A v \rho^2}{3 R V} \times \overline{3 R - 2 \rho}$ , five,  $3 q r^2 R V$   
 $= v \rho^2 \times \overline{3 R - 2 \rho}$ .

Porro, cum *Mensura* aquæ effluentis per foramen tempore  $T$  sit  $2 q m r^2 A$ , *Motus* ejusdem, per *Problema* VI. est  $3 q^2 m r^2 A V$ .

Et *Motus* aquæ per venam fluentis eodem tempore, per methodum *Problemate* secundo usurpatam, invenitur  $\frac{m A v^2 \times \overline{6 R^2 \rho^2 - 8 R \rho^3 + 3 \rho^4}}{3 V R^2}$ .

Hi autem æquales sunt, hoc est,  $3 q^2 m r^2 A V =$   
 $\frac{m A v^2 \times \overline{6 R^2 \rho^2 - 8 R \rho^3 + 3 \rho^4}}{3 V R^2}$ , five,  $9 q^2 r^2 R^2 V^2 =$   
 $v^2 \times \overline{6 R^2 \rho^2 - 8 R \rho^3 + 3 \rho^4}$ .

Duabus his æquationibus rite reductis ad expungendam  $R$ , pervenitur ad æquationem sequentem,  
 $\rho^4 v^2 = 2 q v V r^2 \rho^2 + 12 q^2 V^2 r^2 \rho^2 - 9 q^2 V^2 r^4$ ,  
 unde  $\rho^2 = \frac{q V r^2}{v^2} \times \overline{v + 6 q V - 2 \sqrt{3 q v V + 9 q^2 V^2 - 2 v^2}}$ ,  
 & hinc obtinetur ipse  $\rho$ , five radius venæ contractæ, cum dantur  $q$  &  $v$ .

Porro,

Porro, ex eadem æquatione elicitur,  $v = \frac{qVr}{\xi^2} \times$   
 $r + 2\sqrt{3\xi^2 - 2r^2}.$

Denique,  $q = \frac{\xi^2 v}{rV \times r + 2\sqrt{3\xi^2 - 2r^2}}.$  Q.E.I.

### SCHOLIUM I.

Supra posuimus *Motum* aquæ per venam contractam fluentis æqualem *Motui* effluentis per foramen. Id autem, si rigorem Mathematicum spectes, non est verum. *Motus* enim aquæ per foramen effluentis aqualis est *Motui* aquæ per venam contractam fluentis, & *Motui* annuli aerei venam ambientis, qui aer ab aqua per venam fluente in motum concitatur, simul sumptis. Sed annuli aerei *Motum*, cum ejus annuli crassities non sit major quam  $\frac{R-\xi}{900 \times 900}$ , ejusque den-

sitas non sit major parte  $\frac{1}{900}$  densitatis aquæ, pro nihilo habemus; idque faciendo æquationes longe simpliciores reddimus quam alioqui essent futuræ.

### SCHOLIUM II.

Per *Corollarium* 1. *Problematis* V. cum aqua in vacuum effluit, eadem semper perstat ratio inter radium foraminis & radium venæ contractæ, sive minuatur utcumque per resistantiam *Motus* aquæ effluentis, sive non minuatur. Unde, ut in re physica, veri simillimum censemus, datam haberi rationem  
inter

inter hos radios, etiam cum aqua per aerem profluit, utcumque minuatur *Motus* aquæ effluentis per resistantiam, aut saltem eam rationem non nisi quam minimum mutari. Idque cum reperiatur contentaneum experimentis hætenus factis, quod infra clarius apparebit, nos pro vero habebimus, donec experimenta in posterum accuratius instituenda aliquid certius docuerint.

Porro, si datur ratio inter  $r$  &  $\rho$ , datur etiam ratio inter  $r$  &  $R$ , sive ratio inter radium foraminis, & radium imaginarium, per quem velocitas  $v$  gradatim decrecendo ad nihilum redigitur.

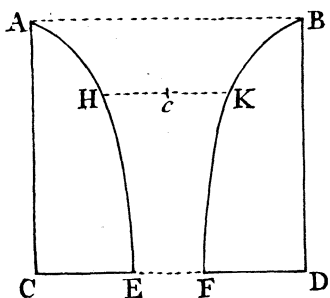
Nam, eliminando  $v$  ex æquationibus duabus supra positis,  $9q^2 r^2 R^2 V^2 = \rho^2 v^2 \times 6R^2 - 8R\rho + 3\rho^2$ , &  $3qr^2 RV = \rho^2 v \times 3R - 2\rho$ , pervenitur ad æquationem,  $\rho^2 \times 9R^2 - 12R\rho + 4\rho^2 = r^2 \times 6R^2 - 9R\rho + 3\rho^2$ , unde  $R = \frac{\rho \times 2 + r}{3 \sqrt{3\rho^2 - 2r^2}}$ .

Præterea, ex altera harum æquationum,  $3qr^2 RV = \rho^2 v \times 3R - 2\rho$ , fit  $3r^2 R : \rho^2 \times 3R - 2\rho :: v : qV$ , & cum data sit ratio prior, datur etiam ratio posterior, hoc est, datur quantitas  $\frac{v}{qV}$ .

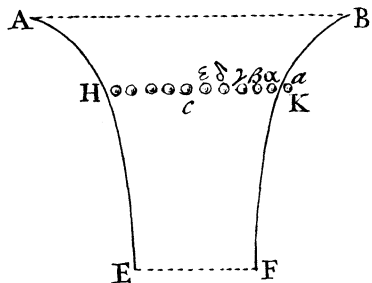
Quantæ autem sint tres hæ rationes datæ, postea demonstrabimus.

*Reliqua proximo Transactionum Numero communicabimus.*

*Fig. 1.*



*Fig. 2.*



*Fig. 3.*

